Písemná zkouška z Matematiky I pro IES FSV UK (A)
ZS 2019-2020

Příklad 1 : Spočtěte limitu posloupnosti:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+n}-\sqrt[4]{n^4+n^3}}{\sqrt{n^2+3n}-\sqrt[3]{n^3+2n}} \qquad \text{(12 bodů)}$$

Příklad 2 : Spočtěte limitu:

$$\lim_{x\to 0} \left(1+\cos x-\cos^2 x\right)^{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}} \qquad \text{(12 bodů)}$$

Příklad 3 : Vyšetřete spojitost (včetně jednostranné spojitosti) a spočtěte derivaci funkce

$$f(x) = \max\{x, 1-x^2, (x-1)^2\}$$

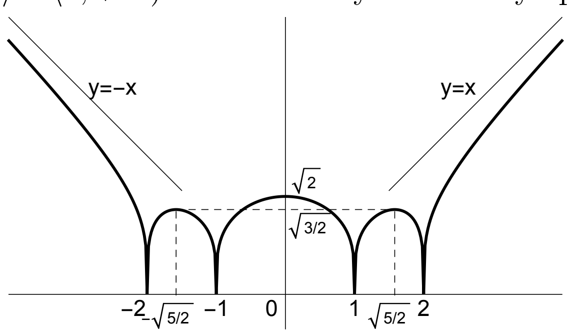
ve všech bodech, v nichž existuje (včetně jednostranných derivací, neexistuje-li oboustranná).
(9 bodů)

Příklad 4 : Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \sqrt[4]{|x^4-5x^2+4|}. \qquad \text{(17 bodů)}$$

Výsledky písemky z Matematiky I pro IES FSV UK (A)
ZS 2019-2020

Příklad 1: $\frac{1}{6}$
Příklad 2: $\sqrt{e}$
Příklad 3: $D_f = \mathbb{R}$, f je spojitá na $\mathbb{R}$. $f'(x) = \begin{cases} 2(x-1), & x \in (-\infty, 0) \cup (\frac{3+\sqrt{5}}{2}, +\infty), \\ -2x, & x \in (0, \frac{\sqrt{5}-1}{2}), \\ 1 & x \in (\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}); \end{cases}$
$f'_-(0) = -2$, $f'_+(0) = 0$, $f'_-(\frac{\sqrt{5}-1}{2}) = 1-\sqrt{5}$, $f'_+(\frac{\sqrt{5}-1}{2}) = 1$, $f'_-(\frac{3+\sqrt{5}}{2}) = 1$, $f'_+(\frac{3+\sqrt{5}}{2}) = 1+\sqrt{5}$.
Příklad 4: $D_f = \mathbb{R}$, f je spojitá na $\mathbb{R}$, f je sudá, další údaje uvádíme na $\langle 0, +\infty)$. $f(0) = \sqrt{2}$, limita v $+\infty$ je $+\infty$. Derivace existuje pro $x \neq \pm 1, \pm 2$, $f'_-(1) = -\infty$, $f'_+(1) = +\infty$, $f'_-(2) = -\infty$, $f'_+(2) = +\infty$. f je klesající na $\langle 0, 1\rangle$, rostoucí na $\langle 1, \sqrt{\frac{5}{2}}\rangle$, klesající na $\langle \sqrt{\frac{5}{2}}, 2\rangle$ a rostoucí na $\langle 2, +\infty)$. V bodech 1 a 2 jsou minima (globální, hodnota 0, v bodech 0 a $\sqrt{\frac{5}{2}}$ jsou lokální maxima $(f(\sqrt{\frac{5}{2}}) = \sqrt{\frac{3}{2}})$. Obor hodnot je $\langle 0, +\infty)$. f je ryze konkávní na intervalech $\langle 0, 1\rangle$ (ze sudosti na $\langle -1, 1\rangle$), $\langle 1, 2\rangle$ a $\langle 2, +\infty)$. Inflexní body nemá. Asymptota v $+\infty$ je $y = x$.
Graf:



Písemná zkouška z Matematiky I pro IES FSV UK (B)
ZS 2019-2020

Příklad 1 : Spočtěte limitu posloupnosti:

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \frac{\sqrt[n]{n^{2n} + (2n)^n}}{\sqrt[n]{n^{3n} + (3n)^n}} \qquad (12 \text{ bodů})$$

Příklad 2 : Spočtěte limitu:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \left(2\sin^2 x\right)^{\frac{1}{\sin x - \cos x}} \qquad (12 \text{ bodů})$$

Příklad 3 : Vyšetřete spojitost (včetně jednostranné spojitosti) a spočtěte derivaci funkce

$$f(x) = \operatorname{arctg}(x-1) \cdot \left|\operatorname{arctg}^2 x - \frac{\pi^2}{16}\right|$$

ve všech bodech, v nichž existuje (včetně jednostranných derivací, neexistuje-li oboustranná).

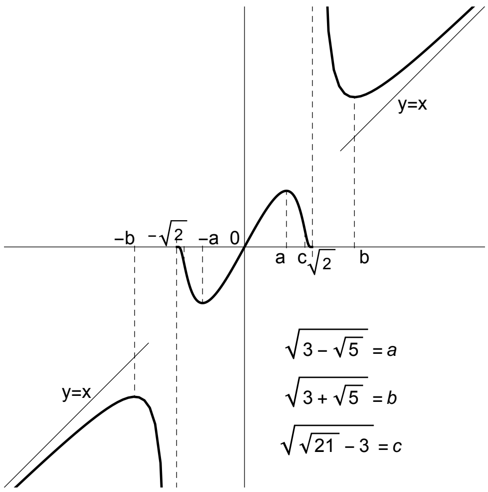
(9 bodů)

Příklad 4 : Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = x \cdot \exp\left(\frac{1}{x^2-2}\right). \qquad (17 \text{ bodů})$$

Výsledky písemky z Matematiky I pro IES FSV UK (B)
ZS 2019-2020

Příklad 1: 1 (lze použít větu o policajtech)
Příklad 2: $e^{\sqrt{2}}$
Příklad 3: $D_f = \mathbb{R}$, f je spojitá na $\mathbb{R}$. $f'(x) = \frac{\left|\operatorname{arctg}^2 x - \frac{\pi^2}{16}\right|}{1+(x-1)^2} + \operatorname{arctg}(x-1)\cdot \operatorname{sgn}\left(\operatorname{arctg}^2 x - \frac{\pi^2}{16}\right) \cdot \frac{2\operatorname{arctg} x}{1+x^2}$ pro $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$. $f'_-(-1) = \frac{\pi}{4}\operatorname{arctg} 2$, $f'_+(-1) = -\frac{\pi}{4}\operatorname{arctg} 2$, $f'(1) = 0$.
Příklad 4: $D_f = \mathbf{R}\setminus\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\}$, f je spojitá v každém bodě D_f. f je lichá, proto většinu údajů uvádíme na $\langle 0,+\infty)$ (tedy na $\langle 0,\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},+\infty)$. $f(0)=0$, limita v $\sqrt{2}$ zleva je nula, zprava $+\infty$, limita v $+\infty$ je $+\infty$. Funkce f je rostoucí na $\langle 0,\sqrt{3-\sqrt{5}}\rangle$ (díky lichosti tedy na $\langle -\sqrt{3-\sqrt{5}},\sqrt{3-\sqrt{5}}\rangle$), klesající na $(\sqrt{3-\sqrt{5}},\sqrt{2})$, klesající na $(\sqrt{2},\sqrt{3+\sqrt{5}}\rangle$, rostoucí na $\langle\sqrt{3+\sqrt{5}},+\infty)$. V bodě $\sqrt{3-\sqrt{5}}$ je lokální maximum, v bodě $\sqrt{3+\sqrt{5}}$ je lokální minimum. $H_f = (-\infty,-f(\sqrt{3+\sqrt{5}})\rangle \cup \langle -f(\sqrt{3-\sqrt{5}}), f(\sqrt{3-\sqrt{5}})\rangle \cup \langle f(\sqrt{3+\sqrt{5}}),+\infty)$ (není těžké ověřit, že $f(\sqrt{3+\sqrt{5}}) > f(\sqrt{3-\sqrt{5}})$). Funkce f je konkávní na $\langle 0,\sqrt{\sqrt{21}-3}\rangle$, konvexní na $\langle\sqrt{\sqrt{21}-3},\sqrt{2})$, konvexní na $(\sqrt{2},+\infty)$; inflexní body jsou 0, $\sqrt{\sqrt{21}-3}$ (a $-\sqrt{\sqrt{21}-3}$). Asymptota v $+\infty$ je $y=x$.
Graf:



Písemná zkouška z Matematiky I pro IES FSV UK (C)
ZS 2019-2020

Příklad 1 : Spočtěte limitu posloupnosti:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{99} - \left(1+\frac{3}{n}\right)^{33}}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^{99} - \left(8+\frac{12}{n}\right)^{33}} \qquad \text{(12 bodů)}$$

Příklad 2 : Spočtěte limitu:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{x^{4x} + (4x)^x - 2}{(2x)^x - 1} \qquad \text{(12 bodů)}$$

Příklad 3 : Vyšetřete spojitost (včetně jednostranné spojitosti) a spočtěte derivaci funkce

$$f(x) = (x^3 - 2x^2 + x) \cdot \left[\frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} x\right] \qquad [\ldots] \text{ znamená celou část}$$

ve všech bodech, v nichž existuje (včetně jednostranných derivací, neexistuje-li oboustranná).
(9 bodů)

Příklad 4 : Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{2}{x} + \log(x^2+4) - \frac{x}{4}. \qquad \text{(17 bodů)}$$

Výsledky písemky z Matematiky I pro IES FSV UK (C)
ZS 2019-2020

Příklad 1: $\frac{1}{2^{97}}$

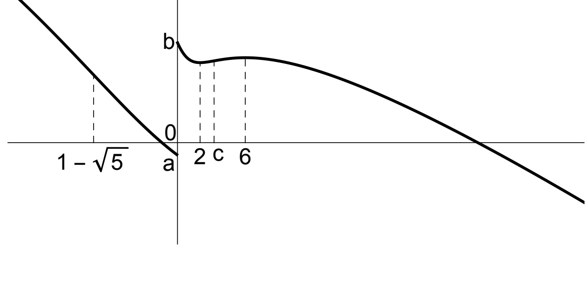
Příklad 2: 5

Příklad 3: $D_f = \mathbb{R}$. f je spojitá v každém bodě $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ (spojitost v bodech $\mathbb{R} \setminus \{-1,0,1\}$ je zřejmá, spojitost v bodech 0 a 1 je třeba dokázat zvlášť); v bodě -1 je f spojitá zprava a nespojitá zleva.

$$f'(x) = \begin{cases} -6x^2+8x-2 & x \in (-\infty,-1), \\ -3x^2+4x-1 & x \in (-1,0), \qquad f'_-(-1) = -\infty,\ f'_+(-1) = -8, \\ 0 & x \in (0,1), \qquad f'_-(0) = -1,\ f'_+(0) = f'(1) = 0. \\ 3x^2-4x+1 & x \in (1,\infty). \end{cases}$$

Příklad 4: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, f je spojitá v každém bodě D_f. f není sudá, lichá ani periodická (periodická není kvůli tvaru D_f; sudě ani liše na první pohled nevypadá, že skutečně není ani sudá ani lichá, plyne z vlastností zjištěných níže). Limita v $-\infty$ je $+\infty$, limita v 0 zleva je $-\frac{\pi}{2} + 2\log 2$, limita v 0 zprava je $\frac{\pi}{2} + 2\log 2$, limita v $+\infty$ je $-\infty$. f je klesající na $(-\infty,0)$, klesající na $(0,2\rangle$, rostoucí na $\langle 2,6\rangle$ a klesající na $\langle 6,+\infty)$. V bodě 2 má lokální maximum a v bodě 6 má lokální infimum. $H_f = \mathbb{R}$. f je konkávní na $(-\infty, 1-\sqrt{5}\rangle$, konvexní na $\langle 1-\sqrt{5}, 0)$, konvexní na $(0, 1+\sqrt{5}\rangle$ a konkávní na $\langle 1+\sqrt{5}, +\infty$. Inflexní body jsou $1-\sqrt{5}$ a $1+\sqrt{5}$. f nemá asymptoty.

Graf:



$$a = -\frac{\pi}{2} + 2\log 2$$

$$b = \frac{\pi}{2} + 2\log 2$$

$$c = 1 + \sqrt{5}$$

Písemná zkouška z Matematiky I pro IES FSV UK (D)
ZS 2019-2020

Příklad 1 : Spočtěte limitu posloupnosti:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^4+\sqrt[3]{n}}-\sqrt[3]{n^4}\right)\left(\left[\sqrt[3]{n+1}\right]+\left[2\sqrt[3]{n-1}\right]+\cdots+\left[n\sqrt[3]{n+(-1)^{n+1}}\right]\right),\qquad \text{(12 bodů)}$$

kde $[\ldots]$ znamená celou část

Příklad 2 : Spočtěte limitu:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{1+\sin^2 x}}{\log\cos x}\qquad \text{(12 bodů)}$$

Příklad 3 : Vyšetřete spojitost (včetně jednostranné spojitosti) a spočtěte derivaci funkce

$$f(x)=\left(\operatorname{arccotg} x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sqrt[3]{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}x\right)-\frac{1}{2}}$$

ve všech bodech, v nichž existuje (včetně jednostranných derivací, neexistuje-li oboustranná).
(9 bodů)

Příklad 4 : Vyšetřete průběh funkce

$$f(x)=\frac{\sin x-\frac{1}{2}}{\sin x+\frac{3}{\sqrt{2}}}.\qquad \text{(17 bodů)}$$

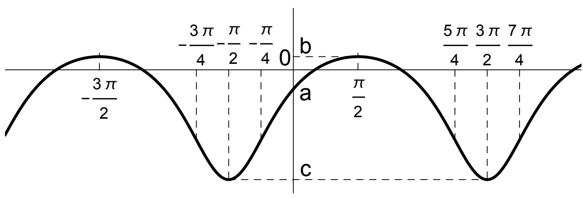
Výsledky písemky z Matematiky I pro IES FSV UK (D)
ZS 2019-2020

Příklad 1: $\frac{1}{6}$ (lze použít větu o policajtech)

Příklad 2: $\frac{7}{6}$

Příklad 3: $D_f=\mathbb{R}$, f je spojitá na $\mathbb{R}$. $f'(x)=-\frac{1}{1+x^2}\sqrt[3]{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}x\right)-1}+\left(\operatorname{arccotg} x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\frac{\pi}{6}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)}{\sqrt[3]{\left(\sin^2\left(\frac{\pi}{4}x\right)-\frac{1}{2}\right)^2}}$ pro $x\in\mathbb{R}\setminus\{2k+1,k\in\mathbb{Z}\}$; $f'(2k+1)=+\infty$ pro $k>0$ liché a $k<0$ sudé, $f'_{(}2k+1)=-\infty$ pro $k>0$ sudé a $k<0$ liché, $f'(1)=0$.

Příklad 4: $D_f=\mathbf{R}$, f je spojitá na $\mathbf{R}$, f je 2π-periodická, lichá ani sudá není (nevypadá tak, že taková skutečně není, plyne z vlastností uvedených níže). Zkoumáme tedy na intervalu $\langle 0,2\pi\rangle$ (na tomto intervalu uvádíme příslušné vlastnosti funkce, vlastnosti na $\mathbb{R}$ se pak získají z periodicity). $f(0)=f(2\pi)=-\frac{\sqrt{2}}{6}$. f je rostoucí na $\langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle$, klesající na $\langle\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi\rangle$, rostoucí na $\langle\frac{3}{2}\pi,2\pi\rangle$. V bodě $\frac{\pi}{2}$ je maximum (globální), v bodě $\frac{3}{2}\pi$ je minimum (globální). $H_f=\langle f(\frac{3}{2}\pi),f(\frac{\pi}{2})\rangle=\langle-\frac{3\sqrt{2}}{2(3-\sqrt{2})},\frac{\sqrt{2}}{2(3+\sqrt{2})}\rangle$. f je konvexní na $(\frac{5}{4}\pi,\frac{7}{4}\pi)$, konkávní na $(0,\frac{5}{4}\pi)$ a na $(\frac{7}{4}\pi,2\pi)$. Inflexní body jsou $\frac{5}{4}\pi$ a $\frac{7}{4}\pi$. f nemá asymptoty.
Graf:



$$a=-\frac{\sqrt{2}}{6}$$

$$b=\frac{\sqrt{2}}{2(3+\sqrt{2})}$$

$$c=-\frac{3\sqrt{2}}{2(3-\sqrt{2})}$$